

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all questions. All questions carry equal marks.

इकाई-1/Unit-I

1. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{2}\right)^3 \dots \dots \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right]^{1/n}$ का मूल्यांकन कीजिए।

Find the value of of :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{2}\right)^3 \dots \dots \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right]^{1/n}$$

(b) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

Test for convergence of the following series.

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \dots \dots \dots$$

अथवा/OR

(a) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

Test for convergence of the following series.

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \dots \dots$$

(b) सिद्ध कीजिए एक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है किन्तु विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

Prove that every absolutely convergent series is convergent but not conversely.

इकाई-2/Unit-II

2. (a) निम्न फलन की सांतत्य की जांच मूल बिन्दु पर कीजिए—

Test the following function for continuity of the origin:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & \text{of } x \neq 0 \\ 0 & \text{of } x = 0. \end{cases}$$

(b) बोरल प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove borel's theorem.

अथवा/OR

(a) यदि एक फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है तो सिद्ध कीजिए वह उस बिन्दु पर संतत होगा, किन्तु विलोम सत्य नहीं है।

If a function is deferentiable at a point then prove that it is continuous at that point but converse is not true.

(b) अवकलनों के लिए डार्बू का मध्यमान प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove darboxi's inter mediate value theorem for derivatives.

इकाई-3/Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए फलनों के योगफल की सीमा फलनों की सीमाओं के योगफल के बराबर होती है।

Prove that the limit of sum of functions is equal to the sum of their limit.

(b) मान ज्ञात कीजिए।

find:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

अथवा/OR

(a) यदि $u=e^{xyz}$, तो दर्शाइये $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$

If, $u=e^{xyz}$ then show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$

- (b) यदि $u = \cos^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, तो सिद्ध कीजिए $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cot u$
 If $u = \cos^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ then prove that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cot u$.

इकाई-4/Unit-IV

4. (a) सरल रेखाओं के कुल $y = mx + am^p$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।
 find the envelop of the family of straight line $y = mx + am^p$
 (b) परवलय $y^2 = 4ax$ केन्द्रक का समीकरण ज्ञात कीजिए।
 find the equation of the evaluate of the parabola $y^2 = 4ax$.

अथवा/OR

- (a) एक त्रिभुज के अन्दर एक बिन्दु इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि तीन शीर्षों से इसकी दूरी के वर्गों का योग निम्नपट है।
 Find a point within a triangle such that the sum of the squares of its distance from the three vertices is a minimum.
 (b) फलन $x^2+y^2+z^2$ का निम्नपट मान ज्ञात कीजिए, जबकि $ax+by+cz = P$ दिया गया है।
 Find the minimum value of $x^2+y^2+z^2$ having given are $ax+by+cz = P$

इकाई-5/Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए :
 Prove that :

$$B(m,n) = \frac{|m| |n|}{|m+n|}$$

- (b) सिद्ध कीजिए :
 Prove that :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{a+bx^{m+n}} dx = \frac{1}{a^n b^m} B(m,n)$$

अथवा/OR

- (a) मूल्यांकन कीजिए $\iiint_R x^2 dx dy dz$ जहां R का घन है जो समतलों $z=0, z=a, y=0, y=a, x=0, x=a$ से परिपद्ध है।
 Evaluate $\iiint_R x^2 dx dy dz$ where R is a cube bounded by the plans $z=0, z=a, y=0, y=a, x=0, x=a$.
 (b) निम्नलिखित समाकलन में समाकलन का क्रम बदलिए:
 Change the order of integration in the following integral.

$$\int_0^a \int_x^{a^2/x} f(x,y) dx dy$$